



# Crittografia Quantistica

**Giovanni Chesi**

Università degli Studi di Pavia

**TendaysPhysics4Teenagers**

Pavia, 18 Giugno 2024

Due messaggi per voi  
(cifrati)

XCHHV PVEV!

TAD AE RI TVRMFS IAQ

Chiave in alfabeto latino classico: ABCDEFGHILMNOPQRSTVX  
(20 lettere)



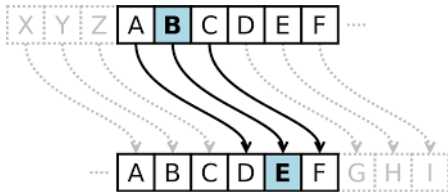
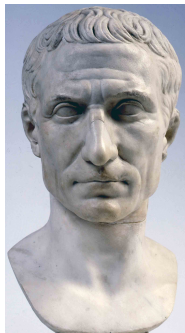
# Brevissima storia della crittografia

Khnumhotep II



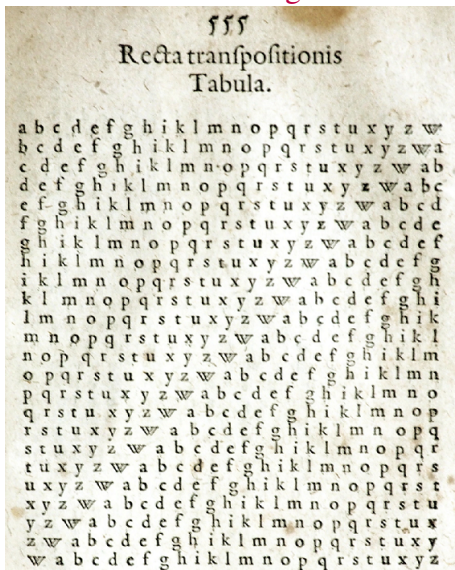
# Breve storia della crittografia

## Il cifrario di Cesare



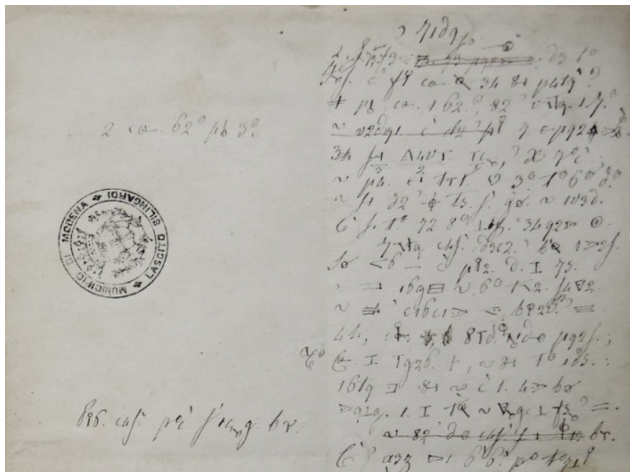
# Breve storia della crittografia

## Il cifrario di Vigenere



# Breve storia della crittografia

## Il poema in codice



Fonte: La Crittografia da Atbash a RSA by Paolo Bonavoglia

<http://www.crittologia.eu/>



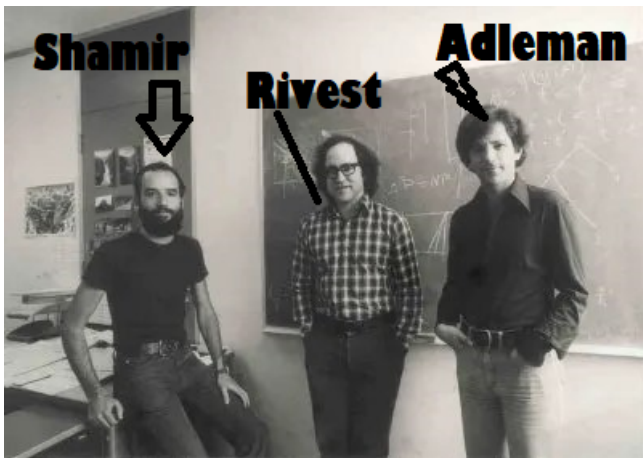
# La lunga storia della crittografia

## Il cifrario di Vernam, ovvero il One Time Pad



# Basta con la storia della crittografia

## Crittografia a chiave pubblica e asimmetrica: il protocollo RSA





## Due messaggi per voi

(cifrati)

Chiave in alfabeto latino classico: ABCDEFGHILMNOPQRSTUVWXYZ  
(20 lettere)

Testo cifrato: **XCHHV PVEV!**

Chiave: V (+18, senza contare la lettera di partenza)

Testo in chiaro: **BELLA RAGA!**

Testo cifrato: **TAD AE RI TVRMFS IAQ**

Chiave: GIOVA, quindi G (+6) - I (+8) - O (+12) - V (+18) - A (+0)

Testo in chiaro: **NON CE LA FARETE MAI**



# Crittografia

A. Ekert, Phys. Rev. Lett. **67**, 661 (1991)

*Today, one can briefly define cryptography as a mathematical system of transforming information so that it is unintelligible and therefore useless to those who are not meant to have access to it. However, as the computational process associated with transforming the information is always performed by physical means, one cannot separate the mathematical structure from the underlying laws of physics that govern the process of computation.*





# Teoria dell'informazione



# Teoria dell'informazione

C. E. Shannon, *A Mathematical Theory of Communication*, Bell Syst.  
Tech. J. 27 (1948)



# Teoria dell'informazione

C. E. Shannon, *A Mathematical Theory of Communication*, Bell Syst. Tech. J. 27 (1948)

- Come posso ingegnerizzare codifica, trasmissione e decodifica dell'informazione



# Teoria dell'informazione

C. E. Shannon, *A Mathematical Theory of Communication*, Bell Syst. Tech. J. 27 (1948)

- Come posso ingegnerizzare codifica, trasmissione e decodifica dell'informazione
- Come posso misurare l'informazione contenuta in un messaggio



# Teoria dell'informazione

C. E. Shannon, *A Mathematical Theory of Communication*, Bell Syst. Tech. J. 27 (1948)

- Come posso ingegnerizzare codifica, trasmissione e decodifica dell'informazione
- Come posso misurare l'informazione contenuta in un messaggio
- Come si può comprimere un messaggio senza perdere informazione





# Teoria dell'informazione

C. E. Shannon, *A Mathematical Theory of Communication*, Bell Syst. Tech. J. 27 (1948)

- Come posso ingegnerizzare codifica, trasmissione e decodifica dell'informazione
- Come posso misurare l'informazione contenuta in un messaggio
- Come si può comprimere un messaggio senza perdere informazione
- Che cosa succede se c'è rumore nel canale



# Teoria dell'informazione

C. E. Shannon, *A Mathematical Theory of Communication*, Bell Syst. Tech. J. 27 (1948)

- Come posso ingegnerizzare codifica, trasmissione e decodifica dell'informazione
- Come posso misurare l'informazione contenuta in un messaggio
- Come si può comprimere un messaggio senza perdere informazione
- Che cosa succede se c'è rumore nel canale

## Entropia di Shannon

$$X = \{X_x\}_{x=0}^N = \{X_0, X_1, \dots, X_N\}$$

$$\begin{aligned} H(X) &\equiv - \sum_{x=0}^N p_x \log_2 p_x \\ &= \sum_{x=0}^N p_x (-\log_2 p_x) \end{aligned}$$



# Teoria fisica dell'informazione - Fotoni viaggiatori



# Teoria fisica dell'informazione - Fotoni viaggiatori



## Fotoni come *flying qubits*

I fotoni si prestano alla trasmissione di informazione perché interagiscono molto poco fra loro e con l'ambiente esterno.



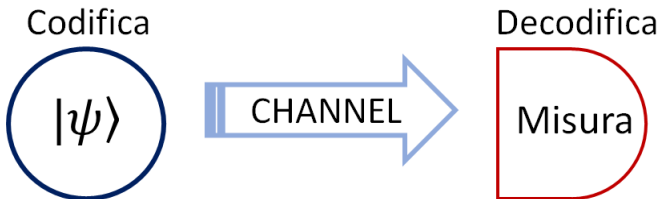
# Teoria fisica dell'informazione - Fotoni viaggiatori



## Fotoni come *flying qubits*

I fotoni si prestano alla trasmissione di informazione perché interagiscono molto poco fra loro e con l'ambiente esterno.

## Teoria quantistica dell'informazione



# Quantum Key Distribution (QKD)

## Crittografia quantistica

La crittografia quantistica è un approccio alla crittografia che ridefinisce la nozione di *sicurezza* attraverso le leggi della meccanica quantistica.



# Quantum Key Distribution (QKD)

## Crittografia quantistica

La crittografia quantistica è un approccio alla crittografia che ridefinisce la nozione di *sicurezza* attraverso le leggi della meccanica quantistica.

## Sicurezza classica

Un sistema crittografico classico ad oggi è sicuro se la decriptazione della chiave richiede un potenza computazionale non accessibile (RSA) e/o se la chiave è usata solo una volta (one-time pad). All'atto di generazione della chiave, l'informazione può sempre essere copiata.



# Quantum Key Distribution (QKD)

## Sicurezza quantistica

Un sistema crittografico quantistico è sicuro perché l'informazione scambiata all'atto di generazione della chiave non può essere letta o copiata senza che questo sia scoperto da mittente e ricevente.

## QKD

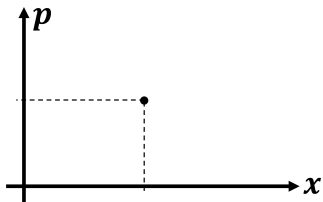
Un protocollo di Quantum Key Distribution permette a due parti di generare e condividere una chiave segreta attraverso un canale quantistico insicuro, operazioni locali e comunicazione classica (LOCC).





# Stato di un sistema fisico

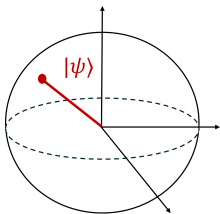
## Meccanica Newtoniana



$$\mathbf{x} = x, y, z$$

$$\mathbf{p} = p_x, p_y, p_z$$

## Meccanica Quantistica



$$\langle \psi | = (|\psi\rangle)^*, \quad \langle \psi | \cdot |\psi\rangle = \langle \psi | \psi\rangle = 1,$$

$$\langle \psi_{\perp} | \psi\rangle = 0$$

$$A|a\rangle = a|a\rangle$$

$$|\langle \psi | a\rangle|^2 = \text{Pr}(a | \psi)$$



## Stati di sovrapposizione

Prendiamo due grandezze fisiche  $A \rightarrow \{|a_0\rangle, |a_1\rangle\}$  e  $B \rightarrow \{|b_0\rangle, |b_1\rangle\}$ .

$$A|a_0\rangle = a_0|a_0\rangle, A|a_1\rangle = a_1|a_1\rangle$$

$$B|b_0\rangle = b_0|b_0\rangle, B|b_1\rangle = b_1|b_1\rangle$$

$$|a_0\rangle \equiv |0\rangle, \quad |a_1\rangle \equiv |1\rangle$$

$$|b_0\rangle \equiv \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} = |-\rangle,$$

$$|b_1\rangle \equiv \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} = |+\rangle$$

$$\text{—————} |1\rangle$$

$$\text{—————} |0\rangle$$

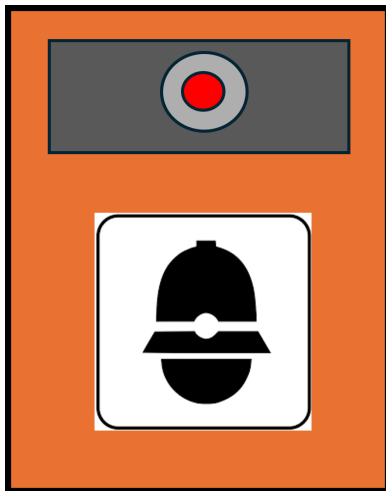
- Preparo il sistema in uno degli stati di  $A$ , diciamo  $|0\rangle$
- Misuro la grandezza fisica  $B$
- Qual è la probabilità di vedere uno dei due possibili risultati di  $B$ ?

$$\Pr(b_0|a_0) = |\langle -|0\rangle|^2 = \Pr(b_1|a_0) = |\langle +|0\rangle|^2 = 1/2$$



# Relazioni di incertezza

(principio di indeterminazione)



# Teorema del No-Cloning



## Teorema del No-Cloning



# Teorema del No-Cloning



## Protocollo BB84

*"When elementary quantum systems, such as polarized photons, are used to transmit digital information, the uncertainty principle gives rise to novel cryptographic phenomena unachievable with traditional transmission media, e.g. a communication channel on which it is impossible in principle to eavesdrop without a high probability of disturbing the transmission in such a way as to be detected."*

C. H. Bennett and G. Brassard, in *Proceedings of IEEE International Conference on Computers, Systems and Signal Processing, Bangalore, India* (IEEE, New York, 1984), p. 175



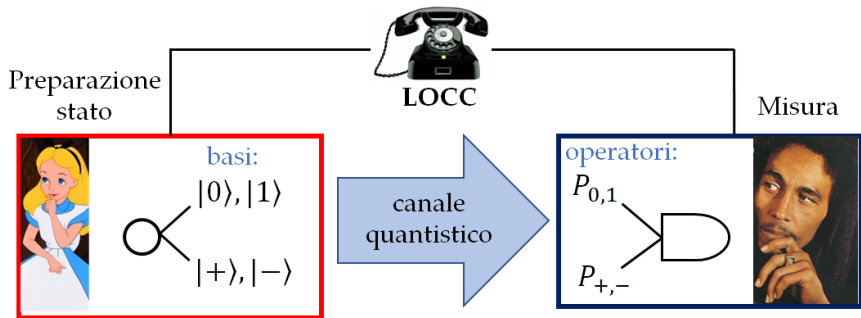
# Protocollo BB84 - P&M





# Protocollo BB84 - P&M

## 1) Prepare and measure



# Protocollo BB84 - P&M

2) Sifting



# Protocollo BB84 - P&M

## 2) Sifting



# Protocollo BB84 - P&M

## 2) Sifting



Alice

1.  $\{0, 1\}$
2.  $\{+, -\}$
3.  $\{0, 1\}$
4.  $\{0, 1\}$
5.  $\{+, -\}$
6.  $\{0, 1\}$
7.  $\{+, -\}$
8.  $\{+, -\}$
9. ...

Bob

1.  $\{0, 1\}$
2.  $\{+, -\}$
3.  $\{+, -\}$
4.  $\{+, -\}$
5.  $\{0, 1\}$
6.  $\{+, -\}$
7.  $\{0, 1\}$
8.  $\{+, -\}$
9. ...



# Protocollo BB84 - P&M

## 2) Sifting



Alice

1. {0, 1}
2. {+, -}
3. {0, 1}
4. {0, 1}
5. {+, -}
6. {0, 1}
7. {+, -}
8. {+, -}
9. ...

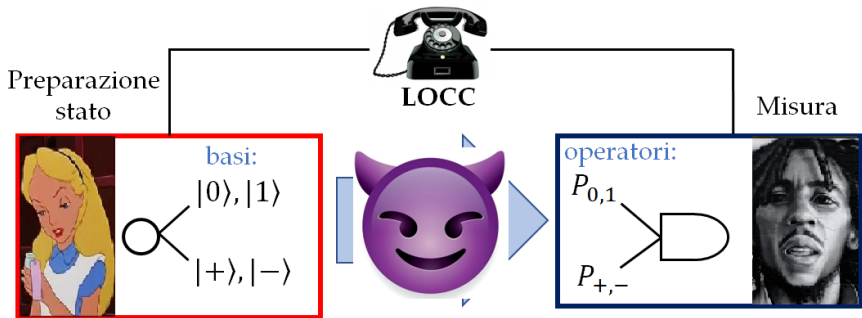
Bob

1. {0, 1}
2. {+, -}
3. {+, -}
4. {0, 1}
5. {0, 1}
6. {+, -}
7. {0, 1}
8. {+, -}
9. ...



# Protocollo BB84 - P&M

## 1) Prepare and measure



# Protocollo BB84 - P&M

## 3) Parameter estimation



# Protocollo BB84 - P&M

## 3) Parameter estimation

Un sottoinsieme casuale dei bit sopravvissuti (stati preparati da Alice e risultati di Bob) viene confrontato pubblicamente e vengono calcolati i *rate di errore* (QBER) relativi ad ogni base. Alice e Bob decidono se proseguire o abortire il protocollo.





# Protocollo BB84 - P&M

## 3) Parameter estimation

Un sottoinsieme casuale dei bit sopravvissuti (stati preparati da Alice e risultati di Bob) viene confrontato pubblicamente e vengono calcolati i *rate di errore* (QBER) relativi ad ogni base. Alice e Bob decidono se proseguire o abortire il protocollo.



## 4) Error correction and Privacy amplification



Viene eseguito un algoritmo di correzione degli errori al termine del quale Alice e Bob condividono la stessa chiave. La chiave viene infine compressa e messa in sicurezza.



# Entanglement



# Entanglement

$$\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B, \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B = \mathcal{H}_{AB}$$

$$|\alpha\rangle_A \in \mathcal{H}_A, |\beta\rangle_B \in \mathcal{H}_B \rightarrow |\alpha\rangle_A \otimes |\beta\rangle_B \in \mathcal{H}_{AB}$$

$$|\psi\rangle_{AB}^{(\text{entangled})} \neq |\alpha\rangle_A \otimes |\beta\rangle_B \quad \wedge \quad |\psi\rangle_{AB}^{(\text{entangled})} \in \mathcal{H}_{AB}$$

$$|\psi\rangle_{AB}^{(\text{entangled})} = \sum_j \lambda_j |j\rangle_A |j\rangle_B$$



# Entanglement

$$\mathcal{H}_A, \mathcal{H}_B, \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B = \mathcal{H}_{AB}$$

$$|\alpha\rangle_A \in \mathcal{H}_A, |\beta\rangle_B \in \mathcal{H}_B \rightarrow |\alpha\rangle_A \otimes |\beta\rangle_B \in \mathcal{H}_{AB}$$

$$|\psi\rangle_{AB}^{(\text{entangled})} \neq |\alpha\rangle_A \otimes |\beta\rangle_B \quad \wedge \quad |\psi\rangle_{AB}^{(\text{entangled})} \in \mathcal{H}_{AB}$$

$$|\psi\rangle_{AB}^{(\text{entangled})} = \sum_j \lambda_j |j\rangle_A |j\rangle_B$$

## Stati di Bell

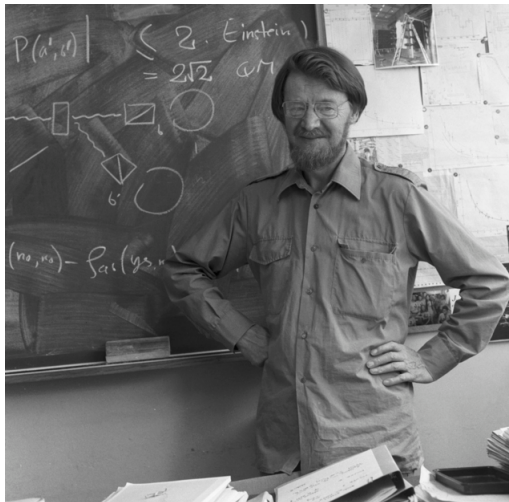
$$|\Phi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \quad |\Phi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$$

$$|\Psi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle) \quad |\Psi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$$

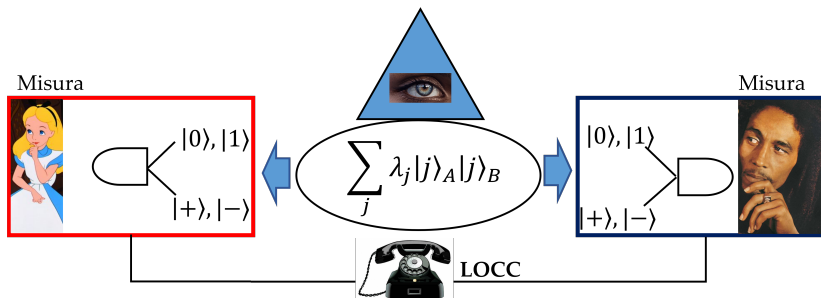


# Entanglement

## Disuguaglianze di Bell



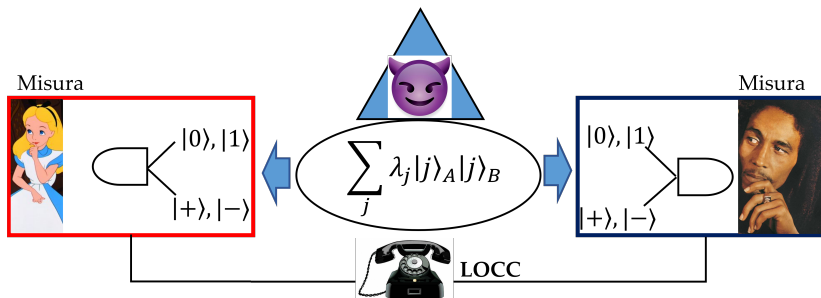
# BB84 entanglement-based



- 1) Misura
- 2) Sifting
- 3) Parameter estimation
- 4) Error correction e Privacy amplification



# BB84 entanglement-based



- 1) Misura
- 2) Sifting
- 3) Parameter estimation
- 4) Error correction e Privacy amplification



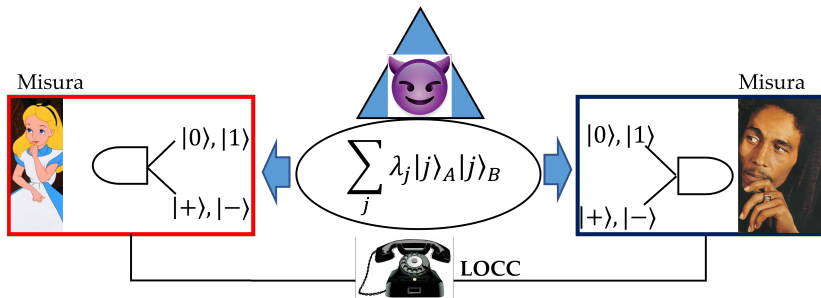
# Protocollo E91

A. Ekert, Phys. Rev. Lett. **67**, 661 (1991)





# Protocollo E91

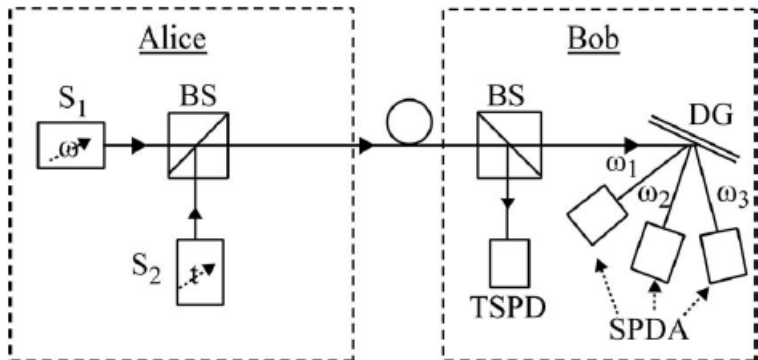


- 1) Misura
- 2) Sifting
- 3) Stima e valutazione delle correlazioni via disuguaglianze di Bell
- 4) Error correction e Privacy amplification



# Sviluppi: QKD a variabili continue

B. Qi, Opt. Lett. **31**, 2795 (2006)



# Sviluppi: Italian Quantum Backbone (IQB)

A. Meda et al., "QKD and frequency distribution cooperation: the Twin-field QKD case," 2022 IEEE 15th Workshop on Low Temperature Electronics (WOLTE), Matera, Italy, 2022, pp. 1-4



# Sviluppi: High dimensional QKD



## Sviluppi: High dimensional QKD

Codifichiamo l'informazione su stati a dimensione  $d > 2$ :



## Sviluppi: High dimensional QKD

Codifichiamo l'informazione su stati a dimensione  $d > 2$ :

quBits  $\rightarrow$  quDits



# Sviluppi: High dimensional QKD

Codifichiamo l'informazione su stati a dimensione  $d > 2$ :

quBits  $\rightarrow$  quDits

Vantaggi:

- protocolli più robusti
- rate di trasmissione maggiori

D. Bruss and C. Macchiavello, *Phys. Rev. Lett.* **88** (2002)

N.J. Cerf, M. Bourennane, A. Karlsson and N. Gisin, *Phys. Rev. Lett.* **88** (2002)



The end

