Cosa impara un fisico dalla matematica
L'esempio della superradianza

Claudio Dappiaggi & Nicolò Drago

Dipartimento di Fisica
Università di Pavia

Pavia - 14/11/2017

Outline del Talk

- Un grande classico – superradianza da un oggetto in movimento
- Cilindro di Zel'dovich – superradianza ed onde
- Esempi inutili che piacciono a me
- Buchi neri e superradianza: c'è?

Oggetti in movimento - Emissione Spontanea

Oggetti in movimento - Emissione Spontanea

Consideriamo un oggetto puntiforme di massa m con

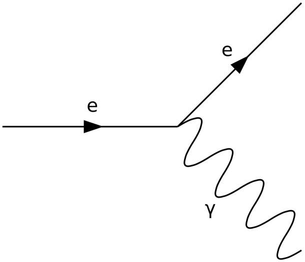
$$p_i^\mu = (E_i, \vec{p}_i), \quad \vec{p}_i = m\vec{v}_i$$

Se un fotone γ viene emesso con

$$p_\gamma = (\hbar\omega, \hbar\vec{k})$$

lo stato finale dell'oggetto puntiforme è

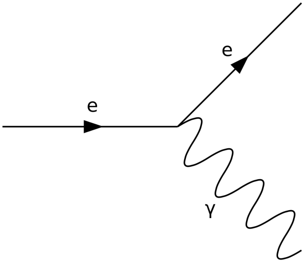
$$p_f^\mu = (E_f, \vec{p}_f), \quad E_f = E_i - \hbar\omega, \;\; \vec{p}_f = \vec{p}_i - \hbar\vec{k}$$



Oggetti in movimento - Emissione Spontanea

Consideriamo un oggetto puntiforme di massa m con

$$p_i^\mu = (E_i, \vec{p}_i), \quad \vec{p}_i = m\vec{v}_i$$



Se un fotone γ viene emesso con

$$p_\gamma = (\hbar\omega, \hbar\vec{k})$$

lo stato finale dell'oggetto puntiforme è

$$p_f^\mu = (E_f, \vec{p}_f), \quad E_f = E_i - \hbar\omega, \;\; \vec{p}_f = \vec{p}_i - \hbar\vec{k}$$

Usando le trasformazioni di Lorentz ($c = 1$) ed assumendo $|\vec{v}_f| = |\vec{v}_i| + \delta v$

$$\Delta\mathcal{E} = \mathcal{E}_f - \mathcal{E}_i = -\Gamma_i \hbar(\omega - \vec{v}_i \cdot \vec{k}) + \mathcal{O}(\delta v), \quad \Gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1 - |\vec{v}_i|^2}},$$

dove $\mathcal{E}_i = \Gamma_i(E_i - \vec{v}_i \cdot \vec{p}_i)$ è l'energia nel sistema comobile all'elettrone.

Interpretazione della formula

Cosa ci dice il calcolo appena fatto?

Se l'oggetto è nel suo stato fondamentale $\mathcal{E}_i < \mathcal{E}_f$, l'emissione avviene solo se

$$\omega - \vec{v}_i \cdot \vec{k} < 0 \quad \text{Condizione di Ginzburg-Frank}$$

Possiamo realizzare questa condizione?

Interpretazione della formula

Cosa ci dice il calcolo appena fatto?

Se l'oggetto è nel suo stato fondamentale $\mathcal{E}_i < \mathcal{E}_f$, l'emissione avviene solo se

$$\omega - \vec{v}_i \cdot \vec{k} < 0 \quad \text{Condizione di Ginzburg-Frank}$$

Possiamo realizzare questa condizione?

- nel vuoto **NO!** perché $\omega = |\vec{k}|$

Cosa ci dice il calcolo appena fatto?

Se l'oggetto è nel suo stato fondamentale $\mathcal{E}_i < \mathcal{E}_f$, l'emissione avviene solo se

$$\omega - \vec{v}_i \cdot \vec{k} < 0 \quad \text{Condizione di Ginzburg-Frank}$$

Possiamo realizzare questa condizione?

- nel vuoto **NO!** perché $\omega = |\vec{k}|$
- In un mezzo dielettrico isotropo **Se Po' Fa'** perché $\omega = \frac{k}{n} = kv_{ph}$ dove v_{ph} è la velocità di fase. Quindi

$$\omega - \vec{v}_i \cdot \vec{k} = \omega \left(1 - \frac{|\vec{v}_i|}{v_{ph}} \cos\theta\right) < 0 \Longrightarrow \cos\theta > \frac{v_{ph}}{|\vec{v}_i|}.$$

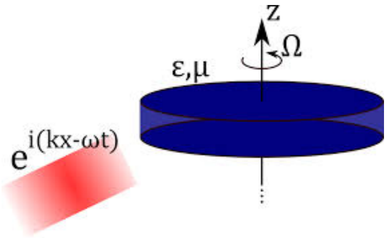
Il cilindro di Zel'dovich

Un cilindro infinito di raggio R che

- ruota con velocità angolare Ω
- è spazialmente uniforme, *i.e.*

$$\epsilon = \epsilon(\omega), \quad \mu = \mu(\omega)$$

- ϵ e μ sono complessi (quindi c'è una conduttività $\sigma \neq 0$)
- fuori dal cilindro $\epsilon_0 \mu_0 = 1$ e $\sigma = 0$.



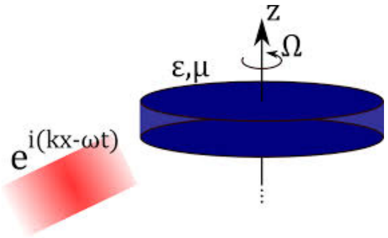
Il cilindro di Zel'dovich

Un cilindro infinito di raggio R che

- ruota con velocità angolare Ω
- è spazialmente uniforme, *i.e.*

$$\epsilon = \epsilon(\omega), \quad \mu = \mu(\omega)$$

- ϵ e μ sono complessi (quindi c'è una conduttività $\sigma \neq 0$)
- fuori dal cilindro $\epsilon_0 \mu_0 = 1$ e $\sigma = 0$.



Voglio risolvere le equazioni di Maxwell in coordinate cilindriche (t, r, ϕ, z)

Di chi abbiamo bisogno?

$$\vec{D} = \epsilon(\omega)\vec{E}, \quad \vec{B} = \mu(\omega)\vec{H}, \quad \vec{j} = \sigma\vec{E}, \quad \rho \geq 0$$

e

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Il cilindro di Zel'dovich - Parte II

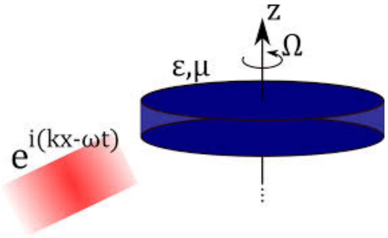
Il cilindro di Zel'dovich - Parte II

Data la simmetria cilindrica cerchiamo

$$\vec{K} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^2} dt dz e^{i(kz+l\phi-\omega t)} \vec{\mathcal{K}}(r),$$

dove $\vec{K}$ è $\vec{B}$ o $\vec{E}$ a seconda del caso.

- Per semplicità lavoreremo con $k = 0$.

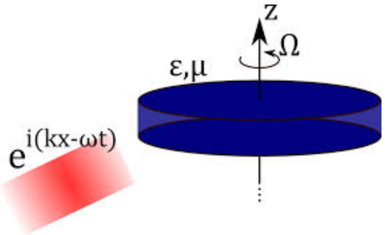


Il cilindro di Zel'dovich - Parte II

Data la simmetria cilindrica cerchiamo

$$\vec{K} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^2} dt dz e^{i(kz+l\phi-\omega t)} \vec{\mathcal{K}}(r),$$

dove $\vec{K}$ è $\vec{B}$ o $\vec{E}$ a seconda del caso.



- Per semplicità lavoreremo con $k = 0$.

- Cerchiamo i modi (AE) ossia il tensore di Faraday (fuori dal cilindro)

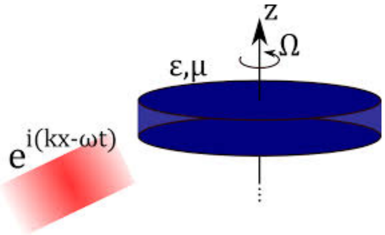
$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & E_z \\ 0 & 0 & 0 & -B_\phi \\ 0 & 0 & 0 & \frac{B_r}{r} \\ -E_z & B_\phi & -\frac{B_r}{r} & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} \mathcal{B}_\phi = -\frac{i}{\omega}\frac{d\mathcal{E}_z}{dr} \\ \mathcal{E}_z = \frac{\Gamma}{\omega}(\omega - l\Omega) f(r) \\ \mathcal{B}_r = \frac{\Gamma}{\omega r^2}(l - \omega\Omega r^2) f(r) \end{cases}$$

Il cilindro di Zel'dovich - Parte II

Data la simmetria cilindrica cerchiamo

$$\vec{K} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^2} dtdz e^{i(kz+l\phi-\omega t)} \vec{\mathcal{K}}(r),$$

dove $\vec{K}$ è $\vec{B}$ o $\vec{E}$ a seconda del caso.



- Per semplicità lavoreremo con $k = 0$.

- Cerchiamo i modi (AE) ossia il tensore di Faraday (fuori dal cilindro)

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & E_z \\ 0 & 0 & 0 & -B_\phi \\ 0 & 0 & 0 & \frac{B_r}{r} \\ -E_z & B_\phi & -\frac{B_r}{r} & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} \mathcal{B}_\phi = -\frac{i}{\omega}\frac{d\mathcal{E}_z}{dr} \\ \mathcal{E}_z = \frac{\Gamma}{\omega}(\omega - l\Omega) f(r) \\ \mathcal{B}_r = \frac{\Gamma}{\omega r^2}(l - \omega\Omega r^2) f(r) \end{cases}$$

con $\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\Omega^2 r^2}}$.

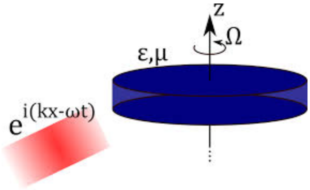
Il cilindro di Zel'dovich - Parte III

La funzione incognita $f(r)$ soddisfa

$$r^2 \frac{d^2 f}{dr^2} + r\frac{df}{dr} - \Gamma^2 A(r) f = 0$$

con

$$A(r) = (l - \omega\Omega r^2)^2 - \epsilon\mu(\omega - l\Omega)^2 r^2 - \frac{4\pi i}{\Gamma}\mu\sigma(\omega - l\Omega) r^2$$



Per risolverla impongo condizioni di raccordo a $r = R$...

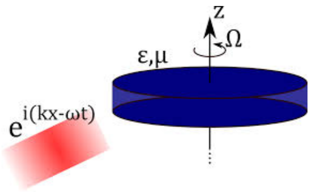
Il cilindro di Zel'dovich - Parte III

La funzione incognita $f(r)$ soddisfa

$$r^2 \frac{d^2 f}{dr^2} + r \frac{df}{dr} - \Gamma^2 A(r) f = 0$$

con

$$A(r) = (l - \omega\Omega r^2)^2 - \epsilon\mu(\omega - l\Omega)^2 r^2 - \frac{4\pi i}{\Gamma}\mu\sigma(\omega - l\Omega) r^2$$



Per risolverla impongo condizioni di raccordo a $r = R$... ah! Ma la voglio risolvere?

Io no!

Guardo invece la media temporale del *flusso radiale* di energia:

$$S_r = \left(\vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu} \right)_r \Longrightarrow \langle S_r \rangle = \frac{1}{16\pi i \omega} \left(\frac{\bar{f}}{\mu} \frac{df}{dr} - \frac{f}{\bar{\mu}} \frac{d\bar{f}}{dr} \right).$$

Il cilindro di Zel'dovich - End Game

- Fuori dal cilindro

$$\frac{d(r\langle S_r\rangle)}{dr} = 0 \Longrightarrow S_r \propto r^{-1}$$

Significato: il flusso di energia può essere calcolato a $r = R$

Il cilindro di Zel'dovich - End Game

- Fuori dal cilindro

$$\frac{d(r\langle S_r\rangle)}{dr} = 0 \Longrightarrow S_r \propto r^{-1}$$

Significato: il flusso di energia può essere calcolato a $r = R$

- Dentro il cilindro

$$\langle S_r\rangle = \frac{-1}{32\pi\omega R}\int\limits_0^R dr\, r\left[\mathcal{A}\left|\frac{df}{dr}\right|^2 + \mathcal{B}\left|f\right|^2\right],$$

dove $\mathcal{A},\mathcal{B} \propto \Im(\epsilon)$ e $\Im(\mu) \propto \mathrm{sgn}(\omega - l\Omega)$.

Il cilindro di Zel'dovich - End Game

- Fuori dal cilindro

$$\frac{d(r\langle S_r\rangle)}{dr} = 0 \Longrightarrow S_r \propto r^{-1}$$

Significato: il flusso di energia può essere calcolato a $r = R$

- Dentro il cilindro

$$\langle S_r\rangle = \frac{-1}{32\pi\omega R}\int_0^R dr\, r\left[\mathcal{A}\left|\frac{df}{dr}\right|^2 + \mathcal{B}\,|f|^2\right],$$

dove $\mathcal{A}, \mathcal{B} \propto \Im(\epsilon)$ e $\Im(\mu) \propto \mathrm{sgn}(\omega - l\Omega)$.

- Risultato

Il flusso di energia è positivo (ossia esce dal cilindro) se

$0 \leq \omega < l\Omega$ Superradianza di Misner-Zel'dovic.

Conclusione: estraggo energia dal cilindro rotante

Esempi di “superradianza” (solo perché mi piacciono)

Sono molti gli ambiti in cui un simile fenomeno entra in gioco:

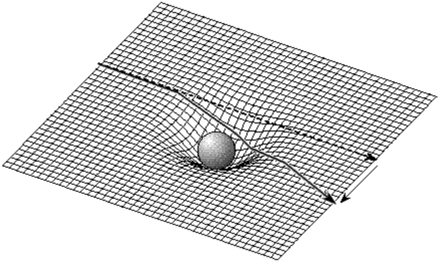
- Effetto Vavilov-Cherenkov
- Radiazione di transizione (i TRD)
- Il boom sonico di un aereo
- Accelerazione mareali

Onde propaganti in un mezzo / sistema in rotazione $\Longleftrightarrow$ Superradianza

I buchi neri sono oggetti rotanti ... osservo lo stesso fenomeno?

- Sono oggetti **classici** previsti a livello teorico dalla relatività generale:
  1. Schwarzschild (1916): buchi neri a simmetria sferica
  2. Kerr (1963): buchi neri rotanti
- *Euristicamente*: sono regioni dello spazio-tempo la cui curvatura è tale da intrappolare la luce
- *Verifica Sperimentale:* la prima osservazione delle onde gravitazionali il 14/09/2015

- la variabile dinamica fondamentale della relatività è la **metrica**,
- codifica l'informazione di come si misurano le lunghezze dei vettori nei diversi punti dello spaziotempo.

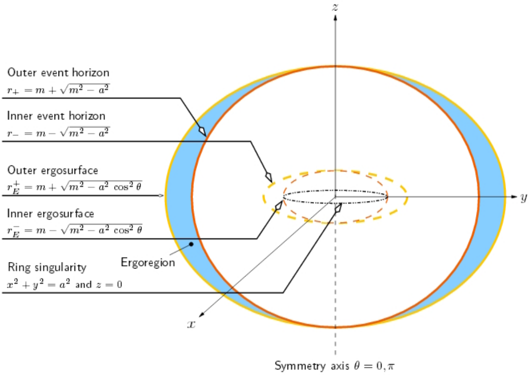


Esempio:

1. in Minkowski la metrica è codificata dalla matrice

$$\eta = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \Box = \eta^{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

dove $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (t, x, y, z)$.



La geometria di un buco nero è *completamente* determinata da

M = massa del buco nero

J = momento angolare ($a = \frac{J}{M}$)

Q = carica elettrica del buco nero

Λ = costante cosmologica (parametro globale)

Buchi Neri - Propagazione delle onde: l'equazione

Come propaga un'onda quando c'è un buco nero?

Guardiamo all'equazione delle onde per un campo scalare... però

- In Minkowski (caso più semplice) $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ tale che

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi = \left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi = 0$$

Buchi Neri - Propagazione delle onde: l'equazione

Come propaga un'onda quando c'è un buco nero?

Guardiamo all'equazione delle onde per un campo scalare... però

- In Minkowski (caso più semplice) $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ tale che
$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi = \left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi = 0$$

- in Schwarzschild (buco nero non rotante e non carico con $\Lambda = 0$)
$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left[\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\partial_r + \frac{L^2}{r^2}\right]\right)\phi = 0$$

Come propaga un'onda quando c'è un buco nero?

Guardiamo all'equazione delle onde per un campo scalare... però

- In Minkowski (caso più semplice) $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ tale che

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi = \left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi = 0$$

- in Schwarzschild (buco nero non rotante e non carico con $\Lambda = 0$)

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left[\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\partial_r + \frac{L^2}{r^2}\right]\right)\phi = 0$$

- in Kerr (buco nero rotante non carico e con $\Lambda = 0$, $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$)

$$\left(-\frac{1}{\Delta}\left(r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2}{r^2 + a^2\cos^2\theta}\sin^2\theta\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{2Mra}{(r^2 + a^2\cos^2\theta)\Delta}\frac{\partial^2}{\partial t \partial \varphi} + \right.$$
$$+ \frac{1}{\Delta\sin^2\theta}\left(1 - \frac{2Mr}{r^2 + a^2\cos^2\theta}\right)\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{\Delta}{(r^2 + a^2\cos^2\theta)}\frac{\partial^2}{\partial r^2} +$$
$$\left. + \frac{1}{(r^2 + a^2\cos^2\theta)}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)\phi = 0$$

Ci sono 3 opzioni ragionevoli

- andare a casa a guardare la Champions o giocare alla PS4

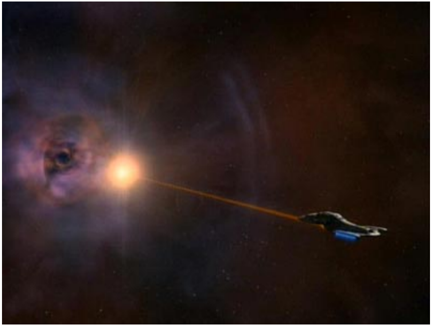
Ci sono 3 opzioni ragionevoli

- andare a casa a guardare la Champions o giocare alla PS4
- cercare di risolvere l'equazione (si può)

Buchi Neri - Superradianza: cosa fare

Ci sono 3 opzioni ragionevoli

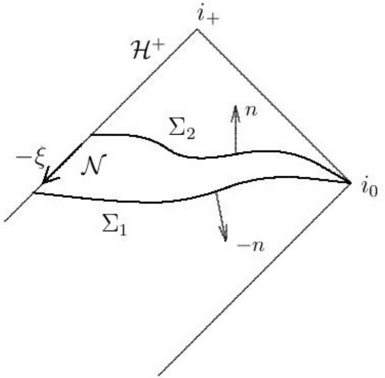
- andare a casa a guardare la Champions o giocare alla PS4
- cercare di risolvere l'equazione (si può)
- usare un metodo smart e veloce, noto come Barbatrucco (risolvere + guardare la Champions)



Buchi Neri - Superradianza: cosa guardare

Scriviamo il campo scalare come

$$\phi(t,r,\theta,\varphi) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} d\omega e^{i(\omega t - l\varphi)} \phi_{lt}(r,\theta).$$



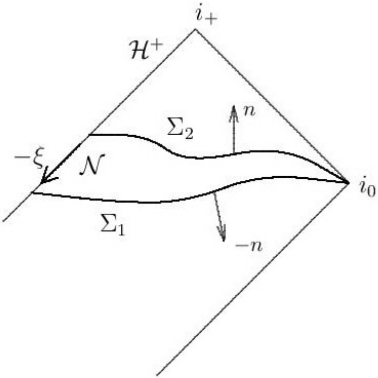
- in generale $\omega \in \mathbb{C}$,
- guardiamo soluzioni che non dipendono da θ,
- calcoliamo il flusso di energia per unità di tempo attraverso l'orizzonte (pensate al cilindro di prima):

$$P[\phi] \propto -\frac{|\phi_{lt}(r_{hor})|^2}{2}[\Im(\omega)^2 + Re(\omega)(Re(\omega) - l\Omega)]$$

Buchi Neri - Superradianza: cosa guardare

Scriviamo il campo scalare come

$$\phi(t,r,\theta,\varphi) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} d\omega e^{i(\omega t - l\varphi)} \phi_{lt}(r,\theta).$$



- in generale $\omega \in \mathbb{C}$,
- guardiamo soluzioni che non dipendono da θ,
- calcoliamo il flusso di energia per unità di tempo attraverso l'orizzonte (pensate al cilindro di prima):

$$P[\phi] \propto -\frac{|\phi_{lt}(r_{hor})|^2}{2}[\Im(\omega)^2 + Re(\omega)(Re(\omega) - l\Omega)]$$

Il flusso di energia è uscente dal buco nero se $P[\phi] > 0$
ossia, dato che $\Im(\omega) \simeq 0$

$0 \leq Re(\omega) < l\Omega \Longrightarrow$ condizione di Misner-Zel'dovic

Buchi Neri - Superradianza: non c'è?!

- Un'onda può estrarre energia da un sistema in rotazione
- Kerr è un esempio particolare di buco nero rotante
- Esistono altri tipi di buchi neri... ad esempio con $\Lambda < 0$ (buchi neri BTZ)

Buchi Neri - Superradianza: non c'è?!

- Un'onda può estrarre energia da un sistema in rotazione
- Kerr è un esempio particolare di buco nero rotante
- Esistono altri tipi di buchi neri... ad esempio con $\Lambda < 0$ (buchi neri BTZ)

PHYSICAL REVIEW D **86,** 047703 (2012)

No superradiance for the scalar field in the BTZ black hole with reflexive boundary conditions

L. Ortíz*

Department of Mathematics, The University of York, York YO10 5DD, United Kingdom

(Received 28 April 2012; published 15 August 2012)

We show that there is no superradiance in the rotating BTZ black hole for vanishing boundary conditions at infinity for the real scalar field.

DOI: 10.1103/PhysRevD.86.047703 PACS numbers: 03.70.+k, 11.10.−z

Buchi Neri - Superradianza: non c'è?!

- Un'onda può estrarre energia da un sistema in rotazione
- Kerr è un esempio particolare di buco nero rotante
- Esistono altri tipi di buchi neri... ad esempio con $\Lambda < 0$ (buchi neri BTZ)
- Non dovrebbe cambiare nulla ... in quanto rotanti
- Perché non c'è superradianza quando la fisica mi dice che c'è?

PHYSICAL REVIEW D **86,** 047703 (2012)

No superradiance for the scalar field in the BTZ black hole with reflexive boundary conditions

L. Ortíz*

Department of Mathematics, The University of York, York YO10 5DD, United Kingdom

(Received 28 April 2012; published 15 August 2012)

We show that there is no superradiance in the rotating BTZ black hole for vanishing boundary conditions at infinity for the real scalar field.

DOI: 10.1103/PhysRevD.86.047703 PACS numbers: 03.70.+k, 11.10.−z

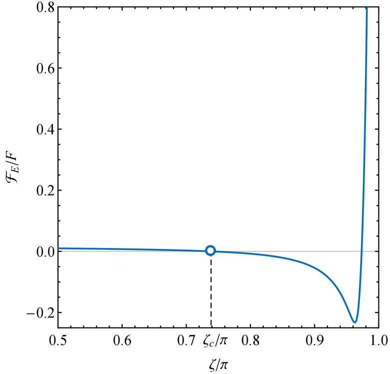
Buchi Neri - Superradianza: ah no, c'è!

Dove è il problema? Tutti dicono che è così,
bisogna accettare

[1] C. D., H. R. C. Ferreira and C. A. R. Herdeiro, *"Superradiance in the BTZ black hole with Robin boundary conditions,"* arXiv:1710.08039 [gr-qc].

Buchi Neri - Superradianza: ah no, c'è!

Dove è il problema? Tutti dicono che è così, bisogna accettare



- In realtà il problema c'è... perché il campo scalare soddisfa equazioni del moto...
- per risolverla ci vogliono condizioni al contorno...
- abbiamo classificato tutte le condizioni al contorno ammissibili ...
- ... dimostrando che la superradianza esiste

Astrofisico+Fisico Teorico+Fisico Matematico $\Longrightarrow$ un problema risolto[1]

[1] C. D., H. R. C. Ferreira and C. A. R. Herdeiro, *"Superradiance in the BTZ black hole with Robin boundary conditions,"* arXiv:1710.08039 [gr-qc].

Conclusioni

Messaggio Scientifico

- si può estrarre energia da un sistema rotante: superradianza
- il fenomeno è **classico**: elettromagnetismo, fluidodinamica, buchi neri
- è necessaria un'attenta analisi matematica delle equazioni che regolano il fenomeno

Conclusioni

Messaggio Scientifico

- si può estrarre energia da un sistema rotante: superradianza
- il fenomeno è **classico**: elettromagnetismo, fluidodinamica, buchi neri
- è necessaria un'attenta analisi matematica delle equazioni che regolano il fenomeno

Messaggio Didattico

- è utile conoscere bene la fisica base classica e quantistica
- è utile conoscere bene la fisica applicata
- è utile conoscere bene la matematica avanzata
- è utile conoscere bene la fenomenologia ed i laboratori

Ci vuole tanto intuito fisico quanto rigore matematico